Exercice n°1 • Circuit RL en dérivation *cours*

1) On a :

$$\boxed{s = R\, i_R = L \frac{di_L}{dt}}$$

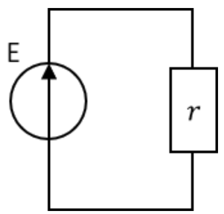
2) En $t = 0^-$, un régime permanent est atteint. Le circuit est ouvert : $\boxed{i_r\left(0^-\right) = 0}$. La bobine est équivalente à un fil électrique : $\boxed{s\left(0^-\right) = 0}$. La loi d'Ohm donne : $\boxed{i_R\left(0^-\right) = 0}$. La loi des nœuds donne : $\boxed{i_L\left(0^-\right) = 0}$.

3) L'intensité à travers une bobine se conserve : $\boxed{i_L\left(0^+\right) = 0}$.
La loi des nœuds donne : $i_r = i_R + i_L$
De plus, la loi des mailles donne : $E = ri_r + Ri_R$
On en déduit :

$$\boxed{i_r\left(0^+\right) = i_R\left(0^+\right) = \frac{E}{r+R}}$$

La loi d'Ohm donne finalement : $\boxed{s\left(0^+\right) = \dfrac{R}{r+R}E}$.

4) La bobine est équivalente à un fil électrique : $\boxed{s\left(+\infty\right) = 0}$.
Le circuit équivalent est :



La loi d'Ohm donne : $\boxed{i_R\left(+\infty\right) = 0}$.

La loi des nœuds et la loi des mailles donnent : $\boxed{i_r\left(+\infty\right) = i_L\left(+\infty\right) = \dfrac{E}{r}}$.

5) La loi des mailles donne :

$$E = ri_r + s = r\left(i_R + i_L\right) + s = r\left(\frac{s}{R} + i_L\right) + s$$

On dérive l'expression :

$$0 = r\left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{di_L}{dt}\right) + \frac{ds}{dt} = r\left(\frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{L}\right) + \frac{ds}{dt}$$

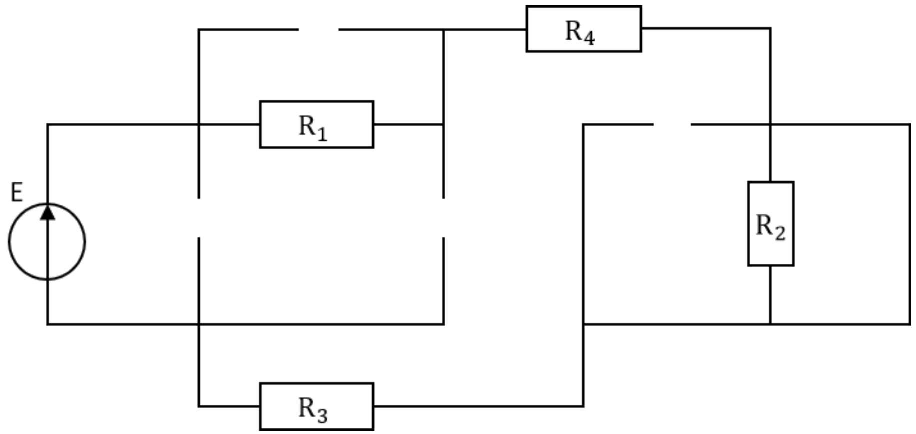
En ré-arrangeant les termes, on obtient bien l'expression demandée.

6) La solution est :

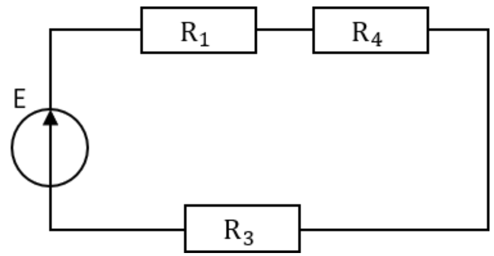
$$s\left(t\right) = \frac{R}{r+R} E\, e^{-t/\tau}$$

Exercice n°2 • Circuit équivalent ★☆☆

Aux temps longs, un condensateur est équivalent à un circuit ouvert et une bobine à un fil électrique. Le circuit est donc équivalent à :



Ce qui se représente plus simplement par :



Exercice n°3 • Circuit RC série en régime libre ★★☆

1) Déterminons les grandeurs en $t = 0^-$. Le condensateur est équivalent à un circuit ouvert, donc $\boxed{i\left(0^-\right) = 0}$. La loi d'Ohm donne : $\boxed{u_R\left(0^-\right) = 0}$. La loi des mailles donne (interrupteur en position 2) : $\boxed{u_C\left(0^-\right) = E}$.

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue, donc $\boxed{u_C\left(0^+\right) = E}$.
La loi des mailles donne (interrupteur en position 1) :

$$0 = u_R + u_C \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u_R\left(0^+\right) = -E}$$

Finalement, la loi d'Ohm donne :

$$\boxed{i\left(0^+\right) = -\frac{E}{R}}$$

Lorsque $t = +\infty$, on atteint de nouveau un régime permanent. En suivant le même raisonnement qu'en $t = 0^-$ mais avec l'interrupteur en position 1, on obtient :

$$\boxed{i(+\infty) = 0} \qquad \boxed{u_R(+\infty) = 0} \qquad \boxed{u_C(+\infty) = 0}$$

2) La loi des mailles donne :

$$0 = u_R + u_C = Ri + u_C = RC\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0} \text{ avec : } \boxed{\tau = RC}$$

La solution est : $u_C(t) = A\,e^{-t/\tau}$. Or, avec les conditions initiales : $u_C\left(0^+\right) = A = E$, on en déduit : $\boxed{u_C(t) = E\,e^{-t/\tau}}$.

3) Pour effectuer un bilan de puissance, on multiplie la loi des mailles par i.

$$\begin{aligned}
0 = Ri + u_C \quad &\Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + u_C i \\
&\Rightarrow \quad 0 = Ri^2 + Cu_C\frac{du_C}{dt} \\
&\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{\text{Joule}}} + \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}Cu_C^2}_{\mathcal{E}_{\text{élec}}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}_{\text{élec}}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{Joule}} < 0
\end{aligned}$$

Interprétation. Après bascule de l'interrupteur, plus aucune puissance n'est fournie au système. L'énergie initialement stockée dans le condensateur se perd par effet Joule.

Exercice n°4 • Conditions initiales et d'équilibre ★★☆

1) Initialement, les condensateurs sont déchargés, donc $u_C\left(0^-\right) = 0$ aux bornes des deux condensateurs. Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs, $u_C\left(0^+\right) = 0$ aux bornes des deux condensateurs.
Appliquons une loi des mailles en $t = 0^+$.

$$E = Ri + 0 + 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i\left(0^+\right) = \frac{E}{R}}$$

De plus, la loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $\boxed{i_1\left(0^+\right) = 0}$. Une loi des nœuds donne finalement : $\boxed{i_2\left(0^+\right) = \frac{E}{R}}$.

2) Notons 1 le premier condensateur (horizontal) et 2 le second (vertical). On atteint un nouveau régime permanent. Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Ainsi : $\boxed{i\left(T^-\right) = i_1\left(T^-\right) = i_2\left(T^-\right) = 0}$.
La loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $u_{C2}\left(T^-\right) = 0$.
Appliquons une loi des mailles en $t = T^-$:

$$E = 0 + u_{C1} + 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u_{C1}\left(T^-\right) = E}$$

Par continuité de la tension aux bornes des condensateurs :

$$\boxed{u_{C2}\left(T^+\right) = 0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u_{C1}\left(T^+\right) = E}$$

Appliquons une loi des mailles en $t = T + -$:

$$0 = Ri + 0 + E \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i\left(T^+\right) = -\frac{E}{R}}$$

De plus, la loi d'Ohm sur la résistance parcourue par le courant i_1 donne immédiatement $\boxed{i_1\left(T^+\right) = 0}$.

Une loi des nœuds donne finalement : $\boxed{i_2\left(T^+\right) = -\frac{E}{R}}$.

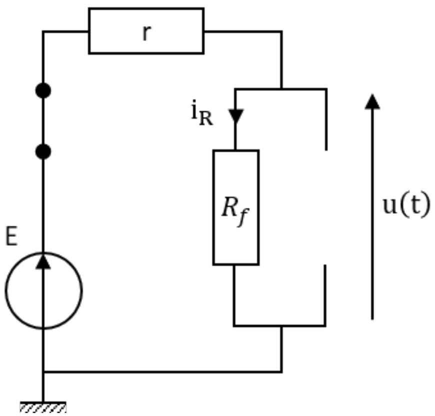
On atteint un nouveau régime permanent lorsque $t = +\infty$. Les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Ainsi : $\boxed{i(+\infty) = i_1(+\infty) = i_2(+\infty) = 0}$.

Exercice n°5 • Étude d'un condensateur réel ★★☆

1) On a :

$$\boxed{u = R_f\, i_R} \qquad \boxed{i_C = C\frac{du}{dt}}$$

2) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. Le circuit équivalent est donc :



3) Par un pont diviseur de tension, on a immédiatement :

$$\boxed{u = \frac{R_f}{R_f + r}E}$$

4) Lorsque l'interrupteur est ouvert, la loi des nœuds donne :

$$0 = i_R + i_C = \frac{u}{R_f} + C\frac{du}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_f C} = 0}$$

La solution est (la CI a été déterminée à la question 3, par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur) :

$$\boxed{u\left(t\right) = \frac{R_f}{R_f + r}E\, e^{-t/R_f C}}$$

5) D'après l'énoncé, la tension $u\left(t\right)$ chute de 10 % en un temps T. Cela signifie que :

$$u\left(T\right) = u\left(0\right) \times 0,9 \quad \Rightarrow \quad e^{-T/R_f C} = 0,9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_f = -\frac{T}{C\,\ln\left(0.9\right)}}$$

Exercice n°6 • Étincelle de rupture ★★☆

1) En $t = 0^-$, la résistance R est court-circuitée et la bobine est équivalente à un fil électrique. La loi des mailles donne donc :

$$E = 0 + 0 + u_r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i\left(0^-\right) = \frac{E}{r}}$$

L'intensité i à travers la bobine est continue en $t = 0$. Donc : $\boxed{i_0 = i\left(0^+\right) = \frac{E}{r}}$.

2) Une fois l'interrupteur ouvert, les deux résistances sont en série. On pose donc : $\boxed{R_{eq} = R + r}$.

3) La loi des mailles donne :

$$E = R_{eq}i + u_L = R_{eq}i + L\frac{di}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}} \text{ avec : } \boxed{\tau = \frac{L}{R_{eq}}}$$

4) La solution est :

$$i\left(t\right) = A\, e^{-t/\tau} + \frac{E\tau}{L} = A\, e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_{eq}}$$

Conditions initiales :

$$i\left(0^+\right) = \frac{E}{r} = A + \frac{E}{R_{eq}} \qquad \Rightarrow \qquad A = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{eq}}\right)$$

Ainsi, après simplification :

$$\boxed{i\left(t\right) = \frac{E}{R_{eq}}\left(1 + \frac{R}{r}e^{-t/\tau}\right)}$$

5) D'après la loi d'Ohm :

$$\boxed{u_K\left(t\right) = Ri\left(t\right) = \frac{R}{R_{eq}}E\left(1 + \frac{R}{r}e^{-t/\tau}\right)}$$

En particulier,

$$\boxed{u_K\left(0^+\right) = \frac{R}{r}E}$$

Dans le cas où $R \gg r$, on a $\boxed{u_K\left(0^+\right) \to +\infty}$

6) AN : $\boxed{u_K\left(0^+\right) = 40 \text{ kV}}$. Cette valeur est comparable à celle des lignes haute tension. On va observer en pratique un arc électrique lors de l'ouverture.

Exercice n°7 • Lampe à décharge ★★½

1) Le condensateur est déchargé, donc la lampe est éteinte. Tout se passe comme si la lampe n'existe pas (résistance infinie). On se retrouve dans le cas du circuit RC du cours après fermeture de l'interrupteur.

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_1}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau_1 = rC}$$

2) Lorsque la lampe est éteinte, $U_d(t)$ est régit par l'ED ci-dessus. La solution est donnée par : $U_d(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$. La lampe s'allume uniquement si $|U_d(t)| > U_a$. Il faut donc que $\boxed{E > U_a}$. Le temps d'allumage vaut alors :

$$U_a = E\left(1 - e^{T_a/\tau_1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_a = \tau_1 \cdot \ln\left(\frac{E}{E - U_a}\right)}$$

3) On suppose que la lampe est allumée. La loi des mailles donne :

$$E = ri + U_d = r(i_c + i_d) + U_d = r\left(C\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{R_d}\right) + U_d$$

On en déduit, après simplification :

$$\boxed{\frac{dU_d}{dt} + \frac{U_d}{\tau_2} = \frac{E}{\tau_1}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\tau_2 = \frac{\tau_1}{1 + r/R_d}}$$

4) On pose $t = 0$ le temps où la lampe s'éteint (nouvelle origine des temps pour simplifier les expressions). La solution de l'ED est :

$$U_d(t) = A\,e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1}E = A\,e^{-t/\tau_2} + \frac{E}{1 + r/R_d}$$

Avec les CI :

$$U_a = A + \frac{E}{1 + r/R_d} \qquad \Rightarrow \qquad A = U_a - \frac{E}{1 + r/R_d}$$

Ainsi :

$$\boxed{U_d(t) = \left(U_a - \frac{E}{1 + r/R_d}\right)e^{-t/\tau_2} + \frac{E}{1 + r/R_d}}$$

La lampe s'éteint si $U_d < U_e$. Cela se produit au temps :

$$U_e = U_d(T_e) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_e = \tau_2 \cdot \ln\left(\frac{U_a - \dfrac{E}{1 + r/R_d}}{U_e - \dfrac{E}{1 + r/R_d}}\right)}$$

5) Ensuite, on repart sur la première ED. La tension U_d augmente, ce qui va inévitablement allumer la lampe. On retombe alors dans la deuxième ED, etc. On obtient une succession de flashs lumineux. On peut choisir les durées des flashs en choisissant la valeur de r.

Exercice n°8 • Circuits du premier ordre à 2 mailles ★★★

1) Lorsque $t \to +\infty$, la bobine est équivalente à un fil électrique. Le circuit est donc équivalent à une résistance uniquement de valeur :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \| R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

On en déduit immédiatement (loi d'Ohm) :

$$\boxed{i_1(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}}}$$

On obtient i_2 et i_3 à l'aide d'un pont diviseur de courant.

$$\boxed{i_2(+\infty) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i_1(+\infty)} \qquad \boxed{i_3(+\infty) = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1(+\infty)}$$

2) Notons u_{R_2} la tension aux bornes de la résistance R_2. Exprimons cette tension de trois manières, en exploitant les 3 mailles.

$$u_{R_2} = \boxed{R_2 i_2 = R_3 i_3 + L\frac{di_3}{dt} = E - R_1 i_1}$$

De plus, la loi des nœuds donne : $\boxed{i_1 = i_2 + i_3}$ On a donc 3 équations avec 3 inconnues (i_1, i_2 et i_3). Cherchons l'ED vérifiée par $i_3(t)$, puisque l'on connaît la condition initiale : $i_3(0^+) = 0$ par continuité de l'intensité à travers une bobine.

$$\begin{aligned}
R_3 i_3 + L\frac{di_3}{dt} &= E - R_1 i_1 \\
&= E - R_1(i_2 + i_3) && \leftarrow \quad i_1 = i_2 + i_3 \\
&= E - R_1\left(\frac{R_3}{R_2} i_3 + \frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt} + i_3\right) && \leftarrow \quad i_2 = \frac{R_3}{R_2} i_3 + \frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt}
\end{aligned}$$

On divise par R_1 On rassemble les termes.

$$\underbrace{L\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}_{=L/R_0}\frac{di_3}{dt}+\underbrace{R_3\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}_{=(1+R_3/R_0)}i_3=\frac{E}{R_1}$$

On met l'ED sous forme canonique en divisant par L/R_0.

$$\frac{di_3}{dt}+\frac{R_0+R_3}{L}i_3=\frac{R_0}{R_1L}E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di_3}{dt}+\frac{i_3}{\tau}=\frac{i_3(+\infty)}{\tau}} \text{ avec : } \boxed{\tau=\frac{L}{R_0+R_3}}$$

On en déduit la solution de l'ED :

$$\boxed{i_3(t)=i_3(+\infty)\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

On obtient ensuite $i_2(t)$ à l'aide de l'expression de u_{R_2}.

$$\boxed{i_2(t)=\frac{R_3}{R_2}\,i_3(t)+\frac{L}{R_2}\frac{di_3}{dt}=i_3(+\infty)\cdot\left(\frac{R_3}{R_2}+\frac{R_0}{R_2}\,e^{-t/\tau}\right)}$$

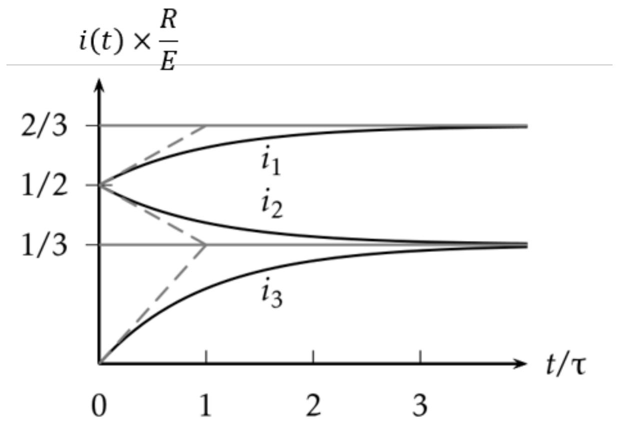
Enfin, on obtient $i_1(t)$ avec la loi de nœuds :

$$\boxed{i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)=i_3(+\infty)\cdot\left(1+\frac{R_3}{R_2}+\left(\frac{R_0}{R_2}-1\right)e^{-t/\tau}\right)}$$

3) Dans le cas où $R_1=R_2=R_3=R$, on a $R_0=R/2$ et $i_3(+\infty)=E/3R$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} i_3(t)&=\frac{E}{3R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\\ i_2(t)&=\frac{E}{3R}\left(1+\frac{1}{2}e^{-t/\tau}\right)\\ i_1(t)&=\frac{E}{3R}\left(2-\frac{1}{2}e^{-t/\tau}\right)\end{aligned}}$$

Graphique :



4) L'énergie emmagasinée dans la bobine à l'issue de la charge vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{mag}}=\frac{1}{2}L\,i_3^2(+\infty)}$$